explicite S I

d) on pose : $y = f^{-1}(x)$ avec : $x \in [1,+\infty[$ et $y \in]-\infty,2]$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow y^2 - 4y + 5 = x \Leftrightarrow (y-2)^2 + 1 = x$

$\Leftrightarrow (y-2)^2 = x - 1 \Leftrightarrow |y-2| = \sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow y - 2 = -\sqrt{x-1}$ car $y \leq 2$

$\Leftrightarrow y = 2 - \sqrt{x-1}$ d'où : $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-1}$

EXERCICE№3

$f(x) = x - 1 - \frac{1}{x}$; $I =]-\infty,0[$

1) $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$

f est continue et strictement croissante sur $]-\infty,0[$

elle réalise donc une bijection de $]-\infty,0[$ sur $J = f(]-\infty,0[)$

$J = f(]-\infty,0[) =]\lim\limits_{x \to -\infty} f, \lim\limits_{x \to 0^+} f[=]-\infty,+\infty[= IR$

2) soit $y = f^{-1}(x)$ avec : $x \in IR$ et $y \in]-\infty,0[$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow y - 1 - \frac{1}{y} = x \Leftrightarrow y^2 - y - 1 = xy$

$\Leftrightarrow y^2 - (1+x)y - 1 = 0$

$\Delta = (1+x)^2 + 4 > 0$

$y = \frac{1 + x - \sqrt{(1+x)^2 + 4}}{2}$ car $y < 0$

D'où : $f^{-1}(x) = \frac{1 + x - \sqrt{x^2 + 2x + 5}}{2}$

3) f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \neq 0$ pour tout $x \in]-\infty,0[$

d'où : f^{-1} est dérivable sur IR.

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}}\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\right]$

EXERCICE№4

$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; $I =]1,+\infty[$

1) f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$